Комплексный анализ, семинар 6 16.03.2012

1. Найдите вычеты каждой из однозначных ветвей заданных многозначных функций относительно указанных особых точек.

1) $\frac{\sqrt{z}}{1+z}$ относительно точки $z=-1$;

2) $\sqrt{z(z-1)}$ относительно точки $z=\infty$;

3) $\mathrm{Ln}\frac{z}{z-1}$ относительно точки $z=\infty$;

4)$\frac{\mathrm{Arctg} z}{z}$ относительно точек $z=0$ и $z=\infty$.

2. *Полином Бернштейна-Сато.* Пусть полином $P(x)\geq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Для $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и комплексного числа λ, такого, что $\mathrm{Re}\lambda>0$, определим функцию

$$\Gamma_f(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}} P^\lambda(x)f(x)\,dx.$$

1) Докажите, что функция $\Gamma_f(\lambda)$ является голоморфной в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$.

2) Пусть $P(x)=x^2$. Найдите полином $b(\lambda)$ (*полином Бернштейна-Сато*) и линейный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами $Q\left(x,\frac{d}{dx}\right)$, такие, что

$$b(\lambda)\Gamma_f(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}} P^{\lambda+1}(x)Q\left(x,\frac{d}{dx}\right)(f(x))\,dx$$

для всех $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

3) Пусть, как и ранее, $P(x)=x^2$. Покажите, что $\Gamma_f(\lambda)$ может быть аналитически продолжена до функции, мероморфной во всей комплексной плоскости (то есть, функции, голоморфной всюду в $\mathbb{C}$, за исключением, возможно, некоторого числа полюсов). Найдите полюсы функции $\Gamma_f(\lambda)$.

3. Пусть $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$ – многочлены, $\deg P=m$, $\deg Q=n$. Охарактеризуйте поведение на бесконечности следующих функций: 1) $P(z)+Q(z)$; 2) $P(z)Q(z)$; 3) $P(z)/Q(z)$.

4. Вычислите вычеты гамма-функция Эйлера (см. задачу 4.7) во всех ее полюсах.

5. Согласно теореме Пикара, аналитическая функция в окрестности своей существенной особенности бесконечно много раз принимает всякое конечное значение, за исключением, быть может, одного, которое называется *пикаровским исключительным значением.* Проверьте теорему Пикара для следующих функций: 1) e^z; 2) $\sin z$; 3) $\mathrm{ctg}\, z$; 4) $\mathrm{tg}^2\, z$. Найдите пикаровские исключительные значения для этих функций и убедитесь в том, что для каждого из этих значений (если они существуют) найдется линия, оканчивающаяся в существенно особой точке, вдоль которой функция стремится к исключительному значению.

6. Пусть $\zeta(z)$ – функция Римана: $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z},\quad \mathrm{Re}z>1$. Покажите, что при $\mathrm{Re}z>1$ $\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int\limits_0^\infty\frac{w^{z-1}}{e^w-1}\,dw$ и получите аналитическое продолжение $\zeta(z)$ в $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Каков характер особенности функции $\zeta(z)$ в $z=1$?